

由测高大地水准面密合平面拟合法确定垂线偏差*

鲍李峰 陆 洋

中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量学重点实验室, 武汉 430077

摘要 提出了一种利用卫星测高资料计算海洋垂线偏差的新方法, 用以提高由卫星测高资料解算海洋垂线偏差和重力异常的分辨率. 首先, 从卫星测高平均海平面高数据中扣除海面地形的影响, 得到测高大地水准面, 再将数据换算到由参考椭球的密切平面和参考椭球法线组成的直角坐标系中. 然后, 根据最小二乘原理拟合网格区域内大地水准面的密合平面, 进而确定出该区域垂线偏差东西分量和南北分量的平均值. 最后, 通过在南海区域的仿真试验分析, 方法计算的垂线偏差东西分量和南北分量的精度分别为 $\pm 0.89''$ 和 $\pm 0.84''$, 与其他方法计算的精度相当.

关键词 卫星测高 垂线偏差 密合平面 最小二乘原理

随着卫星测高技术的发展, 多颗测高卫星的数据被用于联合求解高分辨率的海洋重力异常. 例如, Sandwell 和 Hwang 等利用 Geosat/GM 及 ERS1 数据分别解算了 $2' \times 2'$ 全球海洋重力异常^[1,2], 王海瑛等利用 Geosat/GM, ERS1 及 T/P 三颗测高卫星的数据解算了中国南海区域 $2' \times 2'$ 重力异常^[3], 李建成等利用 Geosat/GM, ERS2 和 T/P 数据解算了中国近海 $2.5' \times 2.5'$ 重力异常^[4]. 他们都采用由多颗测高卫星地面轨迹交叠点推算垂线偏差值, 再由此推求重力异常的解算方法, 即所谓的垂线偏差方法. 经分析比较, 认为这种方法是目前由卫星测高数据反演高分辨率海洋重力异常的最佳方法^[5]. 然而, 由于垂线偏差的计算值仅局限于卫星轨迹的交叠点处, 而目前我们所能得到的交叠点的密度终究有限, 这就限制了推求更高分辨率的重力异常的解算. 因此, 改进垂线偏差的解算方法尤为重要. 目前由卫星测高数据解算海洋垂线偏差主要采用差分法^[6,7]、沿测高轨迹的时间导数法与矢量积法^[1-4,8,9]. 前者使用网格点上的值计算, 其前提是首先要获得网格化的平均海平面高(或大地水准面), 这对于目前的测高数据仍有一定难度; 后者均需要有轨迹交叠点才能解算.

本文提出网格区域的“大地水准面密合平面拟合法”, 利用网格区域的所有测高卫星轨迹有效数据

计算垂线偏差, 旨在充分利用卫星测高数据提高垂线偏差计算的分辨率, 实现高分辨率重力异常的解算.

1 基本原理与方法

首先, 将所选区域沿子午圈和平行圈划分成网格. 然后, 在每个网格内, 以网格左下点为原点, 由平行圈、子午圈和参考椭球外法线组成曲线坐标系. 数据点到原点沿平行圈方向的弧长为 u_1 坐标, 数据点到原点沿子午圈方向的弧长为 u_2 坐标, 平均海面高为 u_3 坐标.

由于我们使用的观测数据是以大地坐标形式存储的. 为了解算方便, 需要将经过预处理的数据转换到直角坐标系中. 如图 1 所示, 以网格左下点为切点, 作参考椭球的密切平面, 在密切平面内, 以子午圈在密切平面上的投影为 x 轴, 以平行圈在密切平面上的投影为 y 轴. 以参考椭球外法线方向为 z 轴.

在此直角坐标系中, 数据点的 x 坐标为原曲线坐标系中 u_1 沿外法线在 x 轴上的投影, y 坐标为原曲线坐标系 u_2 沿外法线在 y 轴上的投影, z 坐标保持不变.

近似转换关系式为

$$\begin{cases} x = \pi \cdot R_0 \cos(\varphi_0) \cdot \frac{(\lambda - \lambda_0)}{180} \\ y = \pi \cdot R_0 \cdot \frac{(\varphi - \varphi_0)}{180} \\ z = h \end{cases},$$

2002-05-20 收稿, 2002-10-08 收修改稿

* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 49634140)及中国科学院(批准号: KZCX2-106)资助项目

E-mail: baolifeng@asch.whiqg.ac.cn

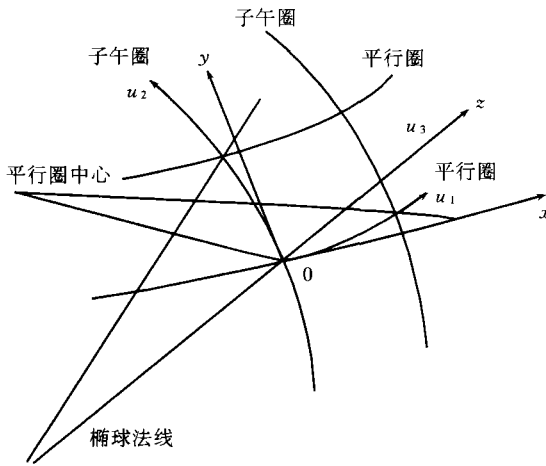


图1 网格坐标系转换

其中 R_0 为原点到地心距离, $(\varphi_0, \lambda_0, h)$ 为原点的大地坐标, (φ, λ) 为数据点的纬度和经度.

在直角坐标系中, 平面的一般方程式为: $Ax + By + Cz + D = 0$. 其中 A, B, C, D 为常数. 通常 D 不为 0, 所以我们将拟合平面的方程简化为: $Ax + By + Cz + 1 = 0$.

本文的主要思想就是用拟合平面来逼近选定网格方块的实际大地水准面(该网格的大小即代表了计

算的分辨率), 用拟合平面的内法线方向表示大地水准面的法线方向, 进而垂线偏差两个分量可分别用式子 $\arctan(-A/C)$ 和 $\arctan(-B/C)$ 来表示.

定义 d_n 为第 n 个离散数据点到拟合平面的垂直距离, 实际上即为该点的拟合平面与大地水准面的差异. 由最小二乘原理, 可以用 $\sum_{n=1}^N d_n^2$ 来衡量数据点与拟合平面的接近程度.

在解析几何中, 网格方块内第 n 个离散数据点到拟合平面的垂直距离 d_n 的表达式为

$$d_n = \frac{(Ax + By + Cz + 1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

故有,
$$\sum_{n=1}^N d_n^2 = \sum_{n=1}^N \frac{(Ax + By + Cz + 1)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

式中 N 为网格方块内数据点的个数. 令 $f(A, B, C) = \sum_{n=1}^N d_n^2$ (为表述方便以下用 \sum 符号代替 $\sum_{n=1}^N$).

由最小二乘法原理和多元函数极值的必要条件, 并约定当 N 值足够大时, 拟合出的平面是唯一的, 可得拟合平面需满足的关系式

$$f'_A(A, B, C) = 0, f'_B(A, B, C) = 0, f'_C(A, B, C) = 0 \quad (f' \text{ 表示求导}) \quad \text{即}$$

$$\begin{cases} (A^2 + B^2 + C^2) \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot x_n = A \cdot \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1)^2 \\ (A^2 + B^2 + C^2) \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot y_n = B \cdot \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1)^2 \\ (A^2 + B^2 + C^2) \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot z_n = C \cdot \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1)^2 \end{cases} \quad (1)$$

化简此方程组, 得到 3 个线性相关的方程:

$$\begin{cases} B \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot x_n = A \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot y_n \\ C \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot x_n = A \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot z_n \\ C \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot y_n = B \sum (Ax_n + By_n + Cz_n + 1) \cdot z_n \end{cases} \quad (2)$$

这是一个三元二次方程组, 要得到方程组的解必须要附加约束条件. 通常大地水准面切平面不可能与参考椭球面垂直, 所以 $C \neq 0$.

另外, 对于任一平面($C \neq 0$), 当我们用 $Ax + By + Cz + D = 0$ 来表示该平面时, $\sum d_n^2$ 取极值的必要条件之一为 $f'_D(A, B, C, D) = 0$, 即

$$\frac{\partial \left(\sum \frac{(Ax + By + Cz + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2} \right)}{\partial D} = 0.$$

则有 $\sum (Ax + By + Cz + D) = 0$, 从而有 $A \sum x_n + B \sum y_n + C \sum z_n + N = 0$, 和 $A \frac{\sum x_n}{N} + B \frac{\sum y_n}{N} + C \frac{\sum z_n}{N} + 1 = 0$,

这说明拟合出的平面必定通过网格方块内离散点的几何中心 $\left(\frac{\sum x_n}{N}, \frac{\sum y_n}{N}, \frac{\sum z_n}{N} \right)$.

为解算方便, 对坐标系进行平移. 将原直角坐标系中坐标转换到以 $\left(\frac{\sum x_n}{N}, \frac{\sum y_n}{N}, \frac{\sum z_n}{N} - 1 \right)$ 为原点的新坐标系中, 新坐标系中离散点坐标以 (x', y', z') 表示, 如图2所示.

前面我们已得到一个约束条件, 即拟合平面必定通过离散点的几何中心. 同样, 拟合平面也必定通过几何中心在新坐标系中的坐标 $(0, 0, 1)$, 新坐标系中, 拟合平面方程变为 $A'x' + B'y' + C'z' + 1 = 0$. 因为新旧坐标系中的拟合平面为同一平面, 故也可用 (A', B', C') 表示拟合平面法线的方向. 坐标系平移的方程为:

$$\begin{cases} x'_n = x_n - \frac{\sum x_n}{N} \\ y'_n = y_n - \frac{\sum y_n}{N} \\ z'_n = z_n - \frac{\sum z_n}{N} + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum (y'_n z'_n) \cdot A' - \sum (x'_n z'_n) \cdot B' - \sum (x'_n y'_n) \cdot A'^2 + \sum (x'_n y'_n) \cdot B'^2 + \sum (x_n'^2 - y_n'^2) \cdot A'B' = 0 \\ [-N - \sum (x_n'^2 - z_n'^2)] \cdot A' - \sum (x'_n y'_n) \cdot B' - \sum (x'_n z'_n) \cdot A'^2 - \sum (y'_n z'_n) \cdot A'B' + \sum x'_n z'_n = 0 \\ -\sum (x'_n y'_n) \cdot A' + [-N - \sum (y_n'^2 - z_n'^2)] \cdot B' - \sum (y'_n z'_n) \cdot B'^2 - \sum (x'_n z'_n) \cdot A'B' + \sum y'_n z'_n = 0, \end{cases}$$

这是一个线性相关的二元二次方程组, 将上述3个方程两两相减, 先后消去 $A'B'$ 项和 B'^2 项, 最

并有, $\sum x'_n = 0, \sum y'_n = 0, \sum z'_n = N$.

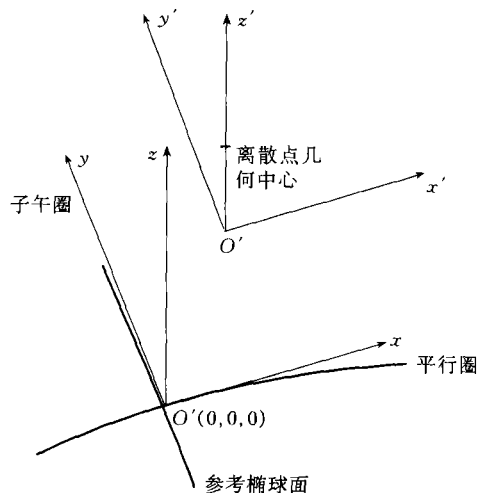


图2 直角坐标系平移

在 $O' - x'y'z'$ 坐标系中, 方程组(2)依然成立, 将 x', y', z' 表达式代入方程组, 并依次将它展开:

后得到只含 B', A' 和 A'^2 项的方程式

$$\begin{aligned} & [(\sum x'_n y'_n)^2 \cdot \sum (x'_n z'_n) - \sum (x'_n y'_n) \cdot \sum (y'_n z'_n) \cdot (N + \sum (x_n'^2 - z_n'^2)) - (\sum y'_n z'_n)^2 \cdot \sum (x'_n z'_n)] \cdot B' \\ & + [(\sum x'_n z'_n)^2 \cdot \sum (x'_n y'_n) - (\sum y'_n z'_n)^2 \cdot \sum (x'_n y'_n) - \sum (x'_n y'_n) \cdot \sum (y'_n z'_n) \cdot \sum (x_n'^2 - y_n'^2)] \cdot A^2 \\ & + [\sum (x'_n y'_n) \cdot \sum (x'_n z'_n) \cdot (N + \sum (x_n'^2 - z_n'^2)) - (\sum x'_n y'_n)^2 \cdot \sum (y'_n z'_n) - (\sum y'_n z'_n)^3 \\ & \quad - \sum (y'_n z'_n) \cdot \sum (x_n'^2 - y_n'^2) \cdot (N + \sum (x_n'^2 - z_n'^2))] \cdot A' \\ & + [\sum (x'_n y'_n) \cdot (\sum y'_n z'_n)^2 - \sum (x'_n y'_n) \cdot (\sum x'_n z'_n)^2 + \sum (x'_n z'_n) \cdot (\sum y'_n z'_n) \cdot \sum (x_n'^2 - y_n'^2)] = 0. \end{aligned}$$

如果上式中 B' 项的系数等于零, 那么上式便成为 A' 的一元二次方程, 可直接求解 A' . 然后, 将求出的 A' 值代入方程组第二个等式, 解出 B' . 当 B' 项系数不为零时, 则将 B' 与 A', A'^2 关系式代入方程组第二式中, 从而得到一个关于 A' 的一元三次方程. 而任何一元三次方程都可以转化为 Carleton 方程形式 $(x^3 + px + q = 0)$, 将 A' 的一元三

次方程各项系数代入 Carleton 方程求解公式, 可求出 A' 的 $n(n=1, 2, 3)$ 个实数解. 再将得到的 A' 值带回 B' 与 A', A'^2 的关系式, 从而得到 B' 的值. 考虑到计算机的计算误差, 经过上述步骤得到的 A', B' 只是近似值. 因此我们以 A', B' 为初值, 采用 Newton 迭代法先后进行迭代, 最后得到了满足精度要求的 A', B' 值. 如果此时 A', B' 不惟

一, 我们只需将 A' , B' 代入 $\sum d_n'^2$, 求出使 $\sum d_n'^2$ 最小的一组 A' , B' 值, 这即所求值. 至此, 我们已求得拟合平面法线的方向 $(A', B', -1)$, 因为垂线偏差的两个分量分别指向东西和南北方向, 故还需将 A' , B' 值按以下公式换算到这两个方向上.

$$\eta = -206265 * \arctan(A'),$$

$$\xi = -206265 * \arctan(B'),$$

单位为弧秒.

2 仿真计算结果分析与比较

作为检验本文方法的一个手段, 采用仿真数据进行分析比较. 在此, 使用展开到 3600 阶次的局部重力位模型 IGG-SCS00A^[10] 计算出研究区域(中国南海及邻近海域 $0 \sim 25^\circ N$, $105 \sim 122^\circ E$) $3' \times 3'$ 网格的大地水准面高, 并将其内插成 $1' \times 1'$ 网格值共 1091913 个数据, 作为测高大地水准面高仿真观测值; 使用该模型计算 $5' \times 5'$ 网格的东西、南北方向上的垂线偏差分量分别为 43829 个值, 作为标准值, 将被用于检验计算的垂线偏差值.

利用本文介绍的“大地水准面密合平面拟合

法”, 由 $1' \times 1'$ 网格的测高大地水准面高仿真观测值作为输入值, 解算得到研究区域 $5' \times 5'$ 网格的垂线偏差值共 43829 个, 结果统计如表 1 所示.

表 1 拟合平面法计算的垂线偏差结果统计

统计项	东西分量	南北分量
数据个数	43829	43829
最小值 (弧秒)	-41.6090	-28.8108
最大值 (弧秒)	65.6915	43.9959
平均值 (弧秒)	-6.7536	3.9539
标准差 (弧秒)	5.0870	4.4732

为了验证结果的准确性, 将 $5' \times 5'$ 的纵横网格线分别作为升、降弧轨迹, 其相应的网格点作为轨迹交叠点, 输入量为沿“升、降弧轨迹”的 $1'$ 网格的测高大地水准面高仿真观测值. 根据大地水准面差分法和 Watts 的升降弧矢量积方法^[9] 分别计算了该区域的“轨迹交叠点”的 $5' \times 5'$ 网格垂线偏差值, 其中, 差分法是用相邻网格点上的值进行差分计算; 矢量积法是将 $5' \times 5'$ 的纵横网格线分别作为升、降弧轨迹, 拟合出切于 $5'$ 网格点的两条相交直线, 求这两条直线的矢量积. 将结果与密合平面拟合法进行比较, 其中剔除了垂线偏差东西、南北分量相互间差值超过 $3''$ 的点. 表 2 列出比较的统计结果 ($5' \times 5'$).

表 2 由不同方法计算垂线偏差的比较统计结果 (单位: 弧秒)

	模型值-拟合法		模型值-差分法		模型值-矢量积法		矢量积法-拟合法		差分法-拟合法	
	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ
$> \pm 3''$	3.02%	2.08%	2.74%	2.98%	2.77%	1.81%	0.11%	0.17%	0.38%	0.91%
最大值	2.997	2.997	3.000	2.997	2.999	2.987	2.980	2.987	2.995	2.998
最小值	-2.999	-3.000	-2.998	-2.997	-2.994	-2.997	-2.996	-2.967	-3.000	-2.995
平均值	-0.02	-0.03	-0.06	0.28	-0.03	0.06	0.00	-0.11	0.04	-0.34
标准差	0.89	0.84	0.86	0.90	0.86	0.82	0.50	0.52	0.60	0.67
中误差	0.89	0.84	0.86	0.94	0.86	0.82	0.50	0.53	0.60	0.75

由表 2 所列的比较统计结果可看到: 在整个研究区域内, 采用本文介绍的“大地水准面密合平面拟合法”(表 2 中简称拟合法)计算的垂线偏差东西分量的中误差为 $\pm 0.89''$, 南北分量的中误差为 $\pm 0.84''$; 差分法计算的垂线偏差东西分量的中误差为 $\pm 0.86''$, 南北分量的中误差为 $\pm 0.94''$; 矢量积法计算的垂线偏差东西分量的中误差为 $\pm 0.86''$, 南北分量的中误差为 $\pm 0.82''$. 从比较的数值上看 3 种方法计算垂线偏差的精度当属同一量级约为 $\pm 0.9''$,

也就是说由本文方法计算的垂线偏差的精度与差分法、升降弧矢量积法计算垂线偏差的精度相当, 而偏差大于 $3''$ 的百分比也基本相同, 这表明本文提出的方法是可行的. 图 3, 图 4 分别给出了“大地水准面密合平面拟合法”计算的垂线偏差东西和南北分量的误差分布, 由图示可看到, 误差呈离散分布. 图 5 则给出了误差分布的直方图, 误差集中分布在 $-1.5'' \sim 1.5''$ 之间, 符合误差分布规律, 从另一角度验证本文方法以及计算过程的正确性.

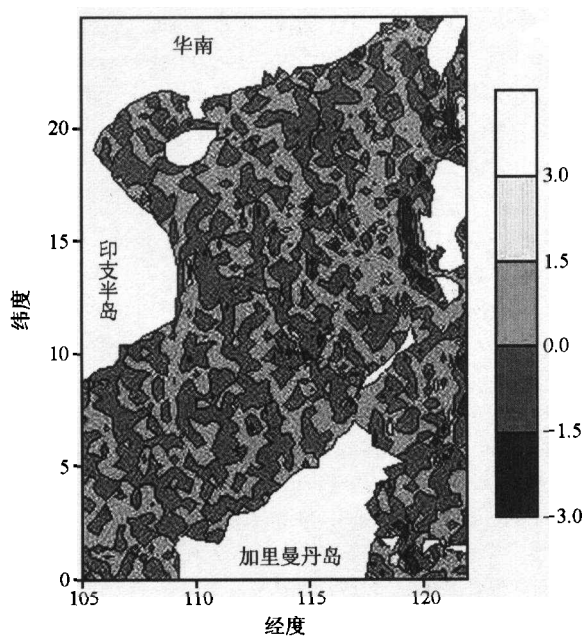


图3 模型值与密合平面拟合法比较东西分量的误差分布 (单位: 弧秒)

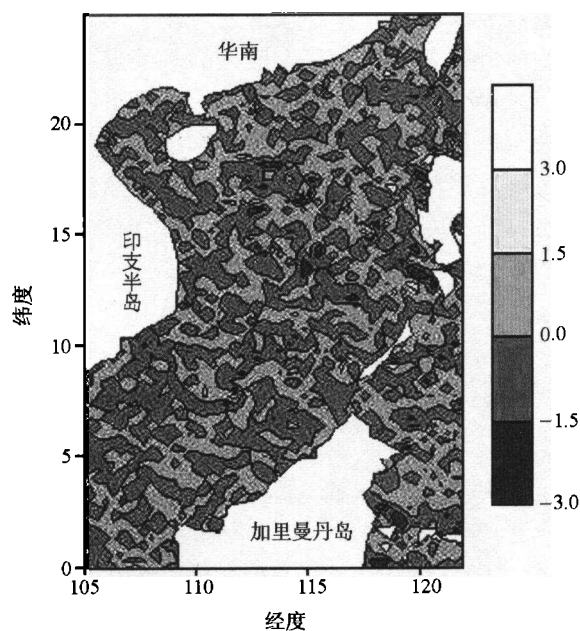


图4 模型值与密合平面拟合法比较南北分量的误差分布 (单位: 弧秒)

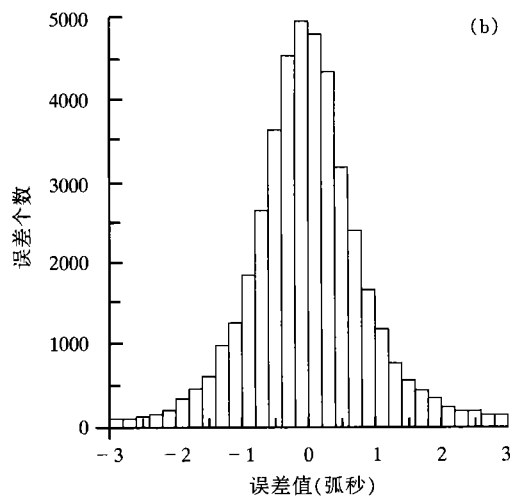
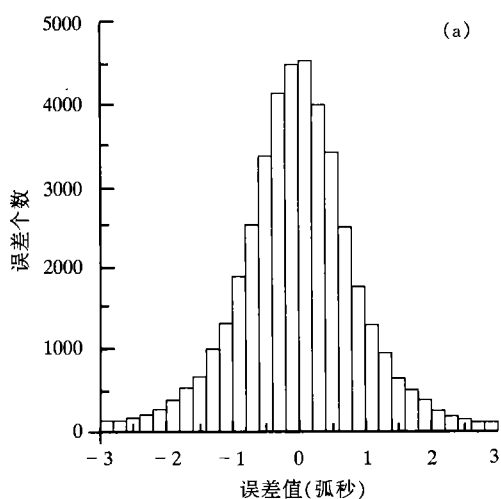


图5 仿真垂线偏差与计算垂线偏差的差值分布直方图

(a) 为东西方向, (b) 为南北方向

3 结论与讨论

近10年来由于各代卫星测高资料的大量积累, 为地球物理学, 大地测量学和海洋学的应用提供了丰富的资料. 而海洋区域的垂线偏差作为许多应用的基础数据, 正受到越来越多的重视. 根据仿真数据, 在研究区域使用本文介绍的大地水准面密合平面拟合法求得的网格垂线偏差值, 能真实地反映该区域的垂线偏差(仿真)分布状况. 通过与其他方法得到的垂线偏差值的比较, 表明了本文方法的可行

性.

由于在原始测高数据中, 测高卫星的地面重复轨迹不完全重合, 在地面重复轨迹中每个卫星的地面轨迹相对于其平均轨迹有一定的飘移. 因此, 实际上每个测高卫星提供的测高数据为离散的带状分布, 当采用多颗卫星测高数据时, 在所有卫星平均轨迹附近一定范围内, 数据点将呈离散分布, 其数量比由各种测高卫星形成的轨迹交叠点多得多, 且分布更广. 而本文介绍的密合平面拟合法, 不需要为了形成线状轨迹对数据进行叠加处理, 可直接利

用离散点数据进行计算,理论上可以利用选定的网格方块的滑移来计算任意离散点的垂线偏差值,不仅可以求得交叠点的垂线偏差值,而且可以计算轨迹交叠点以外的沿卫星轨迹带的垂线偏差值.由于本方法解算不再局限于轨迹交叠点,因而,可用来推求更高分辨率的垂线偏差,继而解算具有更高分辨率的重力异常值.

参 考 文 献

- 1 Sandwell D T, et al. Marine gravity anomaly from Geosat and ERS-1 satellite altimetry. *Journal of Geophysical Research*, 1997, 102: 10039
- 2 Hwang C W. Inverse Vening-Meinesz formula and deflection geoid formula: Applications to the predictions of gravity and geoid over the South China Sea. *Journal of Geodesy*, 1998, 72(4): 304
- 3 王海瑛,等. 中国近海卫星测高数据的重力异常反演——II. 沿轨迹垂线偏差反演法. *高技术通讯*, 2000, 11: 46
- 4 李建成,等. 联合 TOPEX/Poseidon, ERS2 和 Geosat 卫星测高资料确定中国近海重力异常. *测绘学报*, 2001, 30(3): 197
- 5 黄漠涛,等. 利用卫星测高数据反演海洋重力异常的研究. *测绘学报*, 2001, 30(2): 179
- 6 Anzenhofer M, et al. Fully reprocessed ERS-1 altimeter data from 1992 to 1995: Reflection of sea level change. *Journal of Geophysical Research*, 1998, 103: 8089
- 7 Cazenave, A, et al. High-resolution mean sea surface computed with altimeter data of ERS-1 (geodetic mission) and Topex-Poseidon. *Geophys J Int*, 1996, 125: 696
- 8 Kim J H. Improved recovery of gravity anomalies from dense altimeter data. In: Rep 437 of Ohio State Univ, 1996
- 9 Watts A B, et al. On the determination of the deflection of the vertical by satellite altimetry. *Marine Geodesy*, 1984, 8: 89
- 10 陆 洋, 中国南海高分辨率大地水准面及海底地形特征. *自然科学进展*, 2002, 12(7): 767

(上接 268 页)

- (14) 中国中西医结合杂志 月刊 中国中西医结合学会、中国中医研究院主办
- (15) 中国药理学报(英) 月刊 中国药理学会、中国科学院上海药物研究所主办
- (16) 生物化学与生物物理学报 双月刊 中国科学院上海生命科学院生物化学与细胞生物学研究所主办
- (17) 细胞研究(英) 双月刊 中国科学院上海细胞生物学研究所主办
- (18) 植物学报(英) 月刊 中国植物学会、中国科学院植物研究所主办
- (19) 大气科学进展(英) 双月刊 中国科学院大气物理研究所主办
- (20) 地球物理学报 双月刊 中国地球物理学会、中国科学院地质与地球物理研究所主办
- (21) 地质学报(英) 季刊 中国地质学会主办
- (22) 金属学报 月刊 中国金属学会、中国科学院金属研究所主办
- (23) 稀土学报(英) 双月刊 中国稀土学会主办
- (24) 材料科学技术(英) 双月刊 中国金属学会、中国材料研究学会、中国科学院国际材料物理中心主办
- (25) 稀有金属材料与工程 月刊 中国有色金属协会、中国材料研究学会、西北有色金属研究所主办
- (26) 电力系统自动化 半月刊 国家电网公司电力自动化研究所主办
- (27) 计算机科学技术学报(英) 双月刊 中国计算机学会、中国科学院计算所主办
- (28) 管理科学学报 双月刊 国家自然科学基金委员会管理科学部主办
- (29) 中国科学(中、英) 月刊 中国科学院主办
- (30) 科学通报(中、英) 半月刊 中国科学院主办

(供稿: 武长白)